... /All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2023 (2024)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2023 (2024)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2023 (2024)

සංයුක්ත ගණිතය II
இணைந்த கணிதம் II
Combined Mathematics II

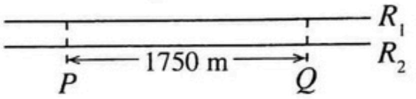
10 S II

B කොටස

* ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

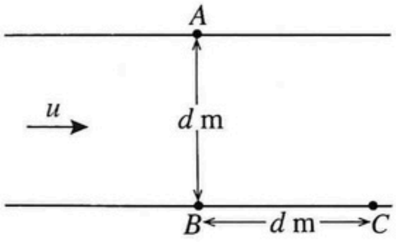
(මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි g මගින් ගුරුත්වජ ත්වරණය දැක්වෙයි.)

11. (*a*) එකිනෙක අතර දුර 1750 m වූ P හා Q දුම්රිය ස්ථාන දෙකක් අතර දිවෙන R_1 හා R_2 යනු සෘජු සමාන්තර දුම්රිය මාර්ග දෙකකි. $t = 0$ හිදී P දුම්රිය ස්ථානයෙන් නිශ්චලතාවයෙන් ආරම්භ කරන A දුම්රියක් 10 m s^{-2} ක ඒකාකාර ත්වරණයකින් R_1 දුම්රිය මාර්ගය දිගේ තත්පර T කාලයක් ගමන් කර, $t = T$ s හිදී එය ලබාගන්නා වේගය තත්පර 30 ක කාලයක් පවත්වා ගනී. ඉන්පසුව, එය තත්පර T කාලයක් ඒකාකාරව මන්දනය වී Q දුම්රිය ස්ථානයේදී නිශ්චලතාවයට පැමිණේ. P සිට Q දක්වා A දුම්රියේ චලිතය සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් ඇඳ ගමනට ගතවූ මුළු කාලය 40 s බව පෙන්වන්න.



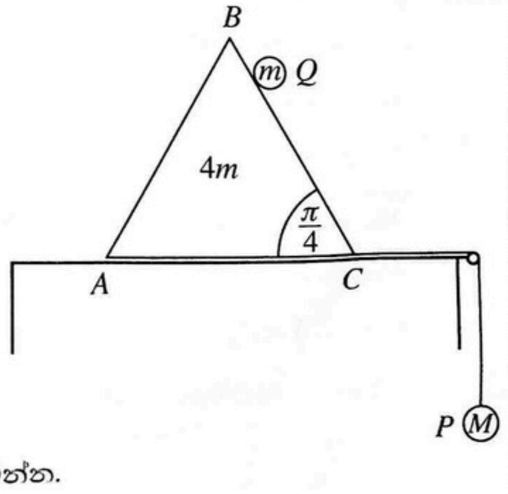
$\overrightarrow{PQ}$ දිශාවට 40 m s^{-1} ක නියත වේගයකින් R_2 දුම්රිය මාර්ගය දිගේ ගමන් කරන තවත් B දුම්රියක් $t = 0$ හිදී P දුම්රිය ස්ථානය පසු කරයි. $t = 0$ සිට $t = 40$ s දක්වා B දුම්රියට සාපේක්ෂව A දුම්රියේ චලිතය සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

(*b*) සෘජු සමාන්තර ඉවුරු දෙකක් අතරින්, d m පළල ගඟක් $u \text{ m s}^{-1}$ ඒකාකාර වේගයකින් ගලා බසී. ජලයට සාපේක්ෂව $\sqrt{2}u \text{ m s}^{-1}$ වේගයක් ඇති P නම් පිහිනුම්කරුවෙක් එක් ඉවුරක වූ A ලක්ෂ්‍යයකින් ආරම්භ කර, අනිත් ඉවුරේ A ට කෙළින්ම ප්‍රතිවිරුද්ධව ඇති B ලක්ෂ්‍යයට ළඟා වීමට පිහිනයි. P පිහිනුම්කරු ට B කරා ළඟා වීමට ගතවන කාලය $\dfrac{d}{u}$ s බව පෙන්වන්න.



ජලයට සාපේක්ෂව $2\sqrt{2}u \text{ m s}^{-1}$ වේගයක් ඇති Q නම් දෙවන පිහිනුම්කරුවෙක්, B සිට d m දුරක් ගඟ පහළින් එම ඉවුරේම වූ C ලක්ෂ්‍යයකින් ආරම්භ කර, P පිහිනුම්කරු මුණගැසෙන අරමුණින් පිහිනයි. (රූපය බලන්න.) P හා Q පිහිනුම්කරුවන් එකම මොහොතේ පිහිනීම ආරම්භ කරන බව උපකල්පනය කර, P පිහිනුම්කරු B ලක්ෂ්‍යයට ළඟා වීමට පෙර Q පිහිනුම්කරු P පිහිනුම්කරු හමුවන බව පෙන්වන්න.

12. (*a*) ස්කන්ධය $4m$ වූ සුමට ඒකාකාර කුඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය තුළින් වූ ABC සිරස් හරස්කඩ රූපයේ දැක්වේ. AC අයත් මුහුණත සුමට තිරස් මේසයක් මත තබා ඇත. තවද, AB හා BC ඒවා අඩංගු මුහුණත්වල උපරිම බෑවුම් රේඛා වන අතර $A\hat{C}B = \dfrac{\pi}{4}$ වේ. කුඤ්ඤයෙහි C ලක්ෂ්‍යය හා ස්කන්ධය M වූ P අංශුවක්, මේසයෙහි දාරයකට සවි කළ කුඩා සුමට කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක අන්තවලට ඈඳා ඇත. තන්තුව, ABC අඩංගු සිරස් තලයේම පිහිටයි. ස්කන්ධය m වූ Q අංශුවක් BC මත අල්වා තබා ඇත. P අංශුව නිදහසේ එල්ලෙයි. තන්තුව තදව ඇතිව පද්ධතිය, නිශ්චලතාවයේ සිට මෙම පිහිටුමෙන් මුදාහරිනු ලැබේ.

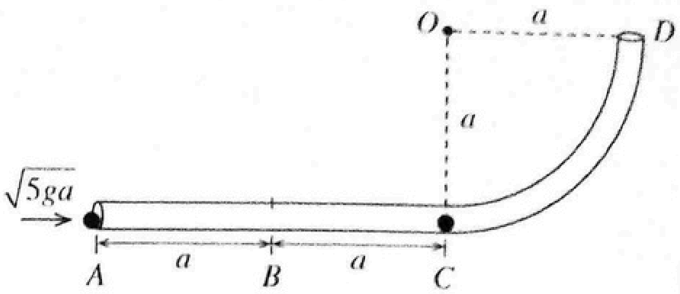


$m < 2M$ නම්, P අංශුව සිරස්ව පහළට චලනය වන බව පෙන්වන්න.

$m = 2M$ නම්, එක් එක් අංශුවෙහි හා කුඤ්ඤයෙහි චලිත විස්තර කරන්න.

[අටවැනි පිටුව බලන්න.

(*b*) රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, $ABCD$ සිහින් බටයක් ABC තිරස්ව ඇතිව සිරස් තලයක සවි කර ඇත. AB හා BC කොටස් එක එකක දිග a වන අතර CD කොටස අරය a හා කේන්ද්‍රය O වන OC සිරස්ව ඇති වෘත්තයකින් හතරෙන් එකකි.



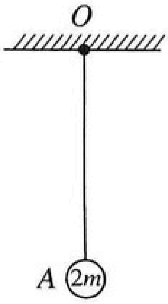
ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් බටය තුළ C ලක්ෂ්‍යයෙහි තබා ඇත. ස්කන්ධය m වූ තවත් Q අංශුවක් බටය තුළ A ලක්ෂ්‍යයෙහි තබා, එයට $\overrightarrow{AB}$ හි දිශාවට $\sqrt{5ga}$ විශාලත්වයක් ඇති ප්‍රවේගයක් දෙනු ලැබේ.

Q අංශුව හා AB කොටස අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{1}{2}$ ක් වන අතර BCD කොටස සුමට වේ.

Q අංශුව බටය තුළ චලනය වී P අංශුව සමග ගැටී හා වේ. මෙම R සංයුක්ත අංශුව චලිතය ආරම්භ කරන ප්‍රවේගය සොයන්න.

යටිඅත් සිරස සමග θ කෝණයකින් $\overrightarrow{OR}$ හැරුන විට, R අංශුවෙහි වේගය v යන්න $v^2 = ga(2\cos\theta - 1)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වා, R අංශුව, බටය තුළ ක්ෂණික නිශ්චලතාවයට පත්වන මොහොතෙහිදී එය මත බටයෙන් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

13. එක එකක ස්කන්ධය m වූ අංශු දෙකක් එකට ඇලවීමෙන් ස්කන්ධය $2m$ වූ P සංයුක්ත අංශුවක් සාදා ඇත. ස්වභාවික දිග a හා ප්‍රත්‍යාස්ථ මාපාංකය $2mg$ වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් අන්තයක් තිරස් සිවිලිමක වූ O අචල ලක්ෂ්‍යයකට ද අනෙක් අන්තය, P සංයුක්ත අංශුවට ද ඈඳා ඇත. P අංශුව A ලක්ෂ්‍යයකදී සමතුලිතතාවයේ එල්ලෙයි. මෙම සමතුලිත පිහිටුමේදී තන්තුවේ විතතිය සොයන්න.



P අංශුව A සිට $\frac{a}{2}$ දුරක් පහළට ඇද මුදාහැරියේ නම්, P හි චලිත සමීකරණය $-\frac{a}{2} \le x \le \frac{a}{2}$ සඳහා $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$ ද $AP = x$ ද වේ.

දැන්, P අංශුව, A සිට l දුරක් පහළට ඇද මුදාහරිනු ලැබේ.

P අංශුව, පූර්ණ සරල අනුවර්තී චලිතයක යෙදීම සඳහා l හි උපරිම අගය කුමක් ද?

P අංශුව, $\sqrt{ag}$ වේගයකින් O ලක්ෂ්‍යයෙහි වැදීම සඳහා l හි අගය සොයන්න.

P අංශුව, මෙම වේගයෙන් O හි වදින විට ස්කන්ධය m වූ එක් අංශුවක් ගැලවී යයි. සිවිලිම අප්‍රත්‍යාස්ථ වේ.

ඉතිරි අංශුව, එහි ගුරුත්වය යටතේ චලිතයෙන් අනතුරුව යෙදෙන නව සරල අනුවර්තී චලිතය සඳහා චලිත සමීකරණය ලබාගන්න.

මෙම තනි අංශුවට, ප්‍රථමවරට ක්ෂණික නිශ්චලතාවයට පත්වීම සඳහා O සිට ගතවන කාලය සොයන්න.

14. (*a*) සුපුරුදු අංකනයෙන්, A, B, C හා D ලක්ෂ්‍ය හතරක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{a} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j}$, $\mathbf{c} = 8\mathbf{i} + \alpha\mathbf{j}$ හා $\mathbf{d} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ වේ; මෙහි $\alpha \in \mathbb{R}$ වේ.

AB හා DC රේඛා, සමාන්තර වේ. $\alpha = 8$ බව පෙන්වන්න.

AC හා BD රේඛා පිහිටුම් දෛශිකය $\mathbf{e}$ වූ E ලක්ෂ්‍යයේදී ඡේදනය වේ.

$\overrightarrow{AE}$ හා $\overrightarrow{AC}$ සැලකීමෙන්, $\lambda \in \mathbb{R}$ සඳහා $\mathbf{e} = (1-\lambda)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{c}$ බව පෙන්වන්න.

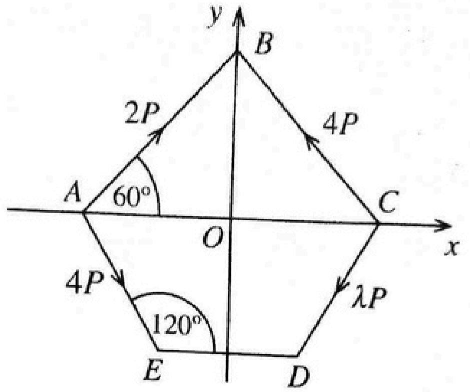
මෙලෙසම, $\mu \in \mathbb{R}$ සඳහා $\mathbf{e} = (1-\mu)\mathbf{b} + \mu\mathbf{d}$ බව ද පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\mathbf{i}$ හා $\mathbf{j}$ ඇසුරෙන් $\mathbf{e}$ සොයන්න.

$\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{ED}$ සැලකීමෙන් $A\hat{E}D$ සොයන්න.

[නවවැනි පිටුව බලන්න.

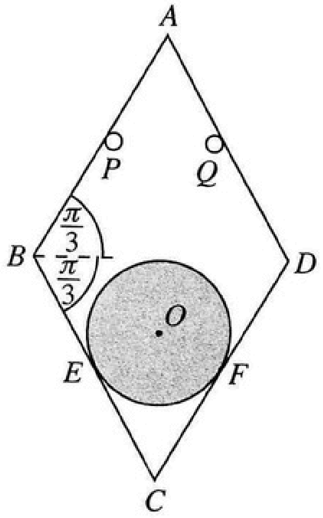
(*b*) රූපයේ පෙන්වා ඇති $ABCDE$ පංචාස්‍රය y-අක්ෂය වටා සමමිතික වේ. A හා C ශීර්ෂ x-අක්ෂය මත ද B ශීර්ෂය y-අක්ෂය මත ද පිහිටයි. තව ද, $AC = 4a$, $DE = 2a$, $A\hat{E}D = 120^\circ$ හා $O\hat{A}B = 60^\circ$ ද වේ; මෙහි O යනු මූලය වේ.



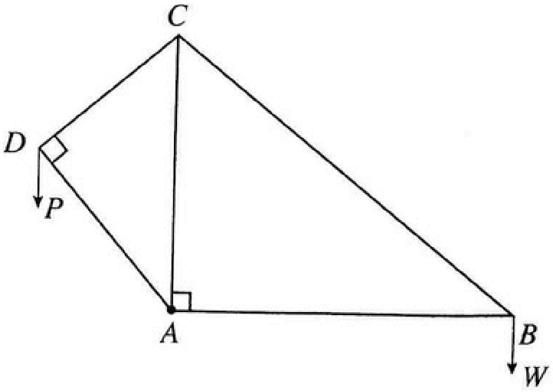
විශාලත්ව $2P, 4P, \lambda P$ හා $4P$ වන බල හතරක් පිළිවෙළින් $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$ හා $\overrightarrow{AE}$ දිගේ ක්‍රියාකරයි; මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ වේ. මෙම බල පද්ධතිය O හරහා ක්‍රියාකරන $\mathbf{R}$ තනි බලයකට තුල්‍ය වන බව දී ඇත. λ හි අගය ද, $\mathbf{R}$ හි විශාලත්වය හා දිශාව ද සොයන්න.

දැන්, විශාලත්වය $2P$ වූ $\overrightarrow{DE}$ දිගේ ක්‍රියාකරන බලයක් හා වාමාවර්ත අතට ක්‍රියාකරන $4\sqrt{3}Pa$ ඝූර්ණයක් සහිත යුග්මයක් ඉහත පද්ධතියට එකතු කරනු ලැබේ. නව පද්ධතිය ඌනනය වන තනි බලයේ විශාලත්වය, දිශාව හා ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

15. (*a*) $2a$ සමාන දිගින් හා W සමාන බරින් යුත් AB, BC, CD හා DA ඒකාකාර දඬු හතරක් A, B, C හා D ලක්ෂ්‍යවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. කේන්ද්‍රය O ද අරය $\frac{a}{\sqrt{3}}$ ද බර W ද වන සුමට ඒකාකාර තුනී වෘත්තාකාර තැටියක් BC හා CD දඬු පිළිවෙළින් E හා F හිදී ස්පර්ශ කරමින් $ABCD$ රාමුව ඇතුළත තබා ඇත.
රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, රාමුවෙන් හා තැටියෙන් සමන්විත පද්ධතිය සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයේ ඇත්තේ එකම තිරස් මට්ටමේ පිහිටි P හා Q අචල සුමට නාදැති දෙකක් මගිනි. $A\hat{B}C = \frac{2\pi}{3}$, $CE = CF = a$ හා AOC රේඛාව සිරස් බව දී ඇත. CD මගින් BC මත C සන්ධියේදී යොදන ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $\frac{\sqrt{3}}{2}W$ බව පෙන්වා නාදැති දෙක අතර දුර සොයන්න.



(*b*) රූපයේ පෙන්වා ඇති රාමු සැකිල්ල, අන්තවලදී සුමටව සන්ධි කළ AB, BC, CD, DA හා AC සැහැල්ලු දඬු පහකින් සමන්විත වේ. $AC = 2a$, $B\hat{A}C = 90^\circ$, $C\hat{D}A = 90^\circ$, $A\hat{B}C = 30^\circ$ හා $C\hat{A}D = 30^\circ$ බව දී ඇත. B සන්ධියෙහි W භාරයක් එල්ලා රාමු සැකිල්ල A හිදී අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමටව අසවු කර AC සිරස්ව ඇතිව පද්ධතිය සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ එයට D සන්ධියෙහිදී සිරස්ව පහළට යෙදූ P බලයක් මගිනි.



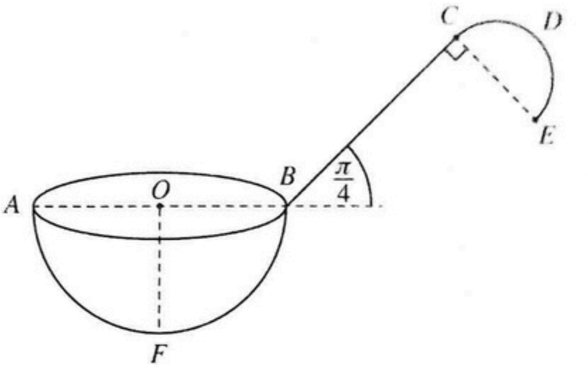
(i) P හි අගය සොයන්න.

(ii) බෝ අංකනය භාවිතයෙන් B, C හා D සන්ධි සඳහා ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් අඳින්න.
ඒ නයින්, දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල, ඒවා ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න ප්‍රකාශ කරමින් සොයන්න.

16. (i) අරය a වූ තුනී ඒකාකාර අර්ධ වෘත්තාකාර කම්බියක ස්කන්ධ කේන්ද්‍ර එහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{2a}{\pi}$ දුරකින් ද,

(ii) අරය a වූ තුනී ඒකාකාර අර්ධ ගෝලාකාර කබොලක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{a}{2}$ දුරකින් ද,

පිහිටන බව පෙන්වන්න.



රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, අරය $\sqrt{2}a$ වූ අර්ධ වෘත්තාකාර CDE කොටසකින් හා දිග $2\sqrt{2}a$ වූ BC ඍජු කොටසකින් සමන්විත සිහින් ඒකාකාර $BCDE$ කම්බියකින් සැදි මිටක්, කේන්ද්‍රය O හා අරය $2a$ වූ තුනී ඒකාකාර අර්ධ ගෝලාකාර කබොලකට දෘඪ ලෙස සවි කර හැන්දක් සාදා ඇත. CE විෂ්කම්භය BC ට ලම්බ වේ. A හා B ලක්ෂ්‍ය අර්ධ ගෝලාකාර කබොලෙහි වෘත්තාකාර ගැට්ටේ විෂ්කම්භයක අන්ත වන අතර F ලක්ෂ්‍යය අර්ධ ගෝලාකාර කබොලෙහි පෘෂ්ඨය මත පිහිටා ඇත්තේ OF හා OB ලම්බ වන පරිදි ය. $\overrightarrow{AB}$ හා $\overrightarrow{BC}$ අතර කෝණය $\frac{\pi}{4}$ ක් වන අතර O, A, B, C, D, E හා F ලක්ෂ්‍ය එකම තලයක පිහිටයි. අර්ධ ගෝලාකාර කබොලෙහි ඒකක වර්ගඵලයක ස්කන්ධය σ ද මිටෙහි ඒකක දිගක ස්කන්ධය $\sqrt{2}a\sigma$ ද වේ. හැන්දේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය OB ට පහළින් $\left(\frac{3\pi-4}{2+5\pi}\right)a$ දුරකින් ද OF සිට $\left(\frac{8+5\pi}{2+5\pi}\right)a$ දුරකින් ද පිහිටන බව පෙන්වන්න.

දැන්, ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් A ලක්ෂ්‍යයට සවිකර ඇත්තේ OF සිරස්ව ඇතිව F ලක්ෂ්‍යය තිරස් ගෙබිමක් ස්පර්ශ කරමින් හැන්ද සමතුලිතතාවේ තැබිය හැකිවන පරිදි ය. a හා σ ඇසුරෙන් m සොයන්න.

17. (*a*) A හා B සර්වසම මලු දෙකකි. A මල්ලෙහි කළු පාට බෝල 3 ක් හා සුදු පාට බෝල 2 ක් අඩංගු වන අතර B මල්ලෙහි කළු පාට බෝල 4 ක් හා සුදු පාට බෝල 3 ක් අඩංගු වේ. බෝල, ඒවා පාටින් හැර අන් සෑම අයුරකින්ම සර්වසම වේ. දැන්, මුහුණත්වල 1, 2, 3, 4, 5 හා 6 අංක යොදා ඇති පැති හයකින් යුත් නොනැඹුරු දාදු කැට දෙකක් එකට පෙරලනු ලැබේ. එවිට ලැබෙන සංඛ්‍යාවල එකතුව ප්‍රථමක සංඛ්‍යාවක් නම් A මල්ල ද, නොඑසේ නම් B මල්ල ද තෝරාගනු ලැබේ. තෝරාගත් මල්ලෙන් සසම්භාවී ලෙස බෝලයක් ඉවතට ගනු ලැබේ.

(i) ඉවතට ගත් බෝලය කළු පාට එකක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(ii) ඉවතට ගත් බෝලය කළු පාට එකක් බව දී ඇති විට, මෙම බෝලය A මල්ලෙන් ඉවතට ගෙන තිබීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.

(*b*) සිසුන් 100 දෙනෙකුට කිසියම් කාර්යයක් නිම කිරීම සඳහා ගත් කාලයන් පහත වගුවේ සාරාංශගත කර ඇත:

ගත් කාලය (තත්පර)	සිසුන් ගණන
0 – 10	10
10 – 20	20
20 – 30	35
30 – 40	20
40 – 50	15

ඉහත දී ඇති සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යස්ථය, මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව නිමානය කරන්න.

පසුව, තවත් සිසුන් 25 දෙනෙකුට එම කාර්යයම දෙන ලදි. මෙම සිසුන් ඉහත වගුවේ එක් එක් කාල ප්‍රාන්තරයට 5 දෙනෙකු බැගින් වැටුණි.

නව ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය නිමානය කරන්න.

* * *

Visit Online Panthiya YouTube channel to watch Combined Maths Videos