සියලු ම හිමිකම් ඇවිරිණි / முழுப் பதிப்புரிமையுடையது / All Rights Reserved]

ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2022 (2023)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2022 (2023)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2022 (2023)

සංයුක්ත ගණිතය II
இணைந்த கணிதம் II
Combined Mathematics II

10 S II

B කොටස

* ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

(මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි g මගින් ගුරුත්වජ ත්වරණය දැක්වෙයි.)

11. (a) සෘජු තිරස් මාර්ගයක වූ O ලක්ෂ්‍යයක සිට නිශ්චලතාවයෙන් ගමන ආරම්භ කරන P කාරය $2f$ m s^{-2} ක නියත ත්වරණයකින් එම මාර්ගයේ වූ A ලක්ෂ්‍යය දක්වා ගමන් කරයි; මෙහි $OA = a$ m වේ. එය A හිදී ලබාගත් ප්‍රවේගය, ගමනේ ඉතිරි කොටස පුරාවටම පවත්වා ගනී. P කාරය A ලක්ෂ්‍යයට ළඟා වන මොහොතේ, තවත් Q කාරයක් එම මාර්ගයේම එම දිශාවටම O ලක්ෂ්‍යයේ සිට නිශ්චලතාවයෙන් ගමන ආරම්භ කර, f m s^{-2} ක නියත ත්වරණයකින් චලනය වේ. එකම රූපයක, P හා Q හි චලිතය සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න.

ඒ නයින්, P හා Q හි ප්‍රවේග සමාන වන මොහොත දක්වා Q ගන්නා ලද කාලය $2\sqrt{\dfrac{a}{f}}$ s බව පෙන්වන්න.

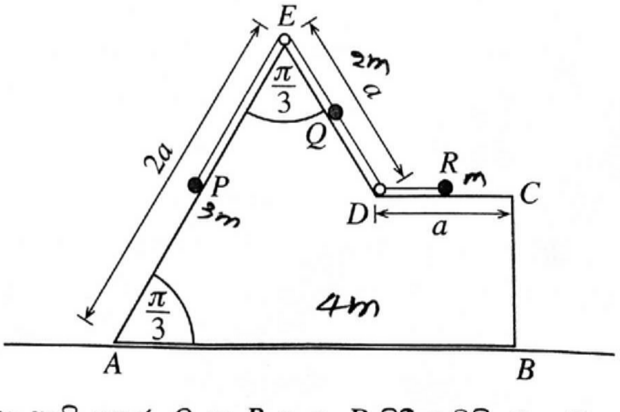
දැන්, $a = 50$ ද $f = 2$ ද හා Q කාරය P කාරය පසු කරන මාර්ගයේ ලක්ෂ්‍යය B යැයි ද ගනිමු.

$AB = 50\left(5+2\sqrt{6}\right)$ m බව පෙන්වන්න.

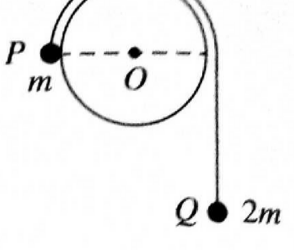
(b) P නැවක් පොළොවට සාපේක්ෂව 60 m s^{-1} ක ඒකාකාර වේගයකින් දකුණු දෙසට යාත්‍රා කරන අතර, Q නැවක් පොළොවට සාපේක්ෂව $30\sqrt{3}$ m s^{-1} ක ඒකාකාර වේගයකින් නැගෙනහිර දෙසට යාත්‍රා කරයි. තෙවන R නැවක්, එය P හි සිට නිරීක්ෂණය කරනු ලැබූ විට, නැගෙනහිරින් 30° ක් උතුරට වූ දිශාවට චලනය වන ලෙස පෙනෙන අතර, R නැව එය Q හි සිට නිරීක්ෂණය කරනු ලැබූ විට දකුණු දෙසට චලනය වන ලෙස පෙනෙයි. R නැව, පොළොවට සාපේක්ෂව, 60 m s^{-1} ක වේගයකින් නැගෙනහිරින් 30° ක් දකුණට වූ දිශාවට චලනය වන බව පෙන්වන්න.

ආරම්භයේදී R නැව, P ගෙන් 24 km ක් ඈතින්, බටහිරින් 60° ක් දකුණට වූ දිශාවෙන් තිබෙන අතර Q ගෙන් 6 km ක් ඈතින් බටහිර දිශාවෙන් තිබේ යැයි සිතමු. P හා R, ඒවා අතර කෙටිම දුරින් පිහිටන විට Q හා R අතර දුර 12 km ක් බව පෙන්වන්න.

12. (a) ස්කන්ධය $4m$ වූ සුමට ඒකාකාර කුට්ටියක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය හරහා වූ $ABCDE$ සිරස් හරස්කඩ රූපයෙන් පෙන්වා ඇත. AB අඩංගු මුහුණත සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත තබා ඇත. AE හා ED ඒවා අඩංගු මුහුණත්වල උපරිම බෑවුම් රේඛා වේ. තවද, $AE = 2a$, $ED = a$, $DC = a$ හා $E\hat{A}B = A\hat{E}D = \dfrac{\pi}{3}$ වේ. ස්කන්ධ පිළිවෙළින් $3m$, $2m$ හා m වන P, Q හා R අංශු තුනක් AE, ED හා DC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයන්හි තබා ඇත. P හා Q අංශු, E හිදී කුට්ටියට සවිකර ඇති සුමට සැහැල්ලු කුඩා කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට ඈඳා ඇති අතර, Q හා R අංශු, D හිදී කුට්ටියට සවිකර ඇති සුමට සැහැල්ලු කුඩා මුදුවක් තුළින් යන තවත් සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට ඈඳා ඇත. රූපයේ පෙන්වා ඇති පිහිටුමේදී තන්තුව තදව තිබෙන අතර මෙම පිහිටුමේ සිට පද්ධතිය නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. Q අංශුව E වෙත ළඟා වීමට ගන්නා කාලය නිර්ණය කිරීමට ප්‍රමාණවත් සමීකරණ ලබාගන්න.

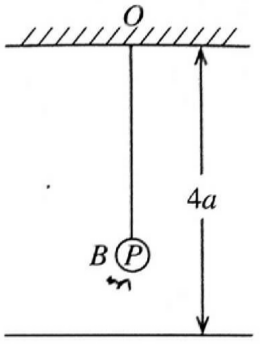


(*b*) අරය a වූ සිලින්ඩරයක් එහි අක්ෂය තිරස්ව සවි කර ඇති අතර එහි අක්ෂයට ලම්බක සිරස් හරස්කඩක් යාබද රූපයෙන් දැක්වේ. සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් යා කළ ස්කන්ධ පිළිවෙළින් m හා $2m$ වූ P හා Q අංශු දෙකක් තන්තුව තදව ද OP තිරස්ව ද ඇතිව රූපයේ පෙන්වා ඇති පිහිටුමෙහි අල්වා තබා නිශ්චලතාවයෙන් මුදා හරිනු ලැබේ. Q අංශුව සිරස්ව පහළට චලනය වන්නේ යැයි උපකල්පනය කරමින්, $\overrightarrow{OP}$ යන්න θ $(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6})$ කෝණයකින් හැරුණු විට P හි වේගය v යන්න $v^2 = \frac{2ga}{3}(2\theta - \sin\theta)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.



$\theta = \frac{\pi}{6}$ විට තන්තුව කපා දමන අතර, P අංශුව සිලින්ඩරය මත චලනය වෙමින් සිලින්ඩරයේ ඉහළම ලක්ෂ්‍යයට ළඟා වීමට පෙර ක්ෂණික නිශ්චලතාවයට පත් වන බව දී ඇත. පසුව එන චලිතයේදී, P එහි ආරම්භක පිහිටුමේ සිට a දුරක් සිරස්ව පහළින් වන විට, P හි වේගය සොයන්න.

13. ස්වභාවික දිග $2a$ හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය $2mg$ වන සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරක්, සුමට තිරස් ගෙබිමකට $4a$ දුරක් ඉහළින් වූ O අචල ලක්ෂ්‍යයකට ද, අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ P අංශුවකට ද ඈඳා ඇත. P අංශුව B හි සමතුලිතතාවයේ එල්ලෙයි. තන්තුවේ විතතිය a බව පෙන්වන්න.



දැන්, P හට mv ආවේගයක් සිරස්ව පහළට දෙනු ලැබේ. P හි චලිත සමීකරණය $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $\omega = \sqrt{\frac{g}{a}}$ හා $BP = x$ වේ.

c විස්තාරය වන, $\dot{x}^2 = \omega^2(c^2 - x^2)$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් $v > \sqrt{ag}$ නම්, P ගෙබිමේ වදින බව පෙන්වන්න;

දැන්, $v = 3\sqrt{ag}$ යැයි සිතමු.

P ගෙබිමේ වදින ප්‍රවේගය සොයන්න.

P සහ ගෙබිම අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e වේ. $e < \frac{1}{\sqrt{2}}$ නම්, P අංශුව O ට ළඟා නොවන බව පෙන්වන්න.

$e = \frac{1}{2}$ බව දී ඇති විට, තන්තුව පළමුවරට බුරුල් වන විට P හි ප්‍රවේගය සොයන්න.

B හිදී P ට ආවේගය දුන් මෙහොතේ සිට, එය පළමුවරට ක්ෂණික නිශ්චලතාවයට පැමිණීමට ගතවන මුළු කාලය සොයන්න.

14. (*a*) A, B, C හා D ලක්ෂ්‍ය හතරක පිහිටුම් දෛශික, O අචල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් පිළිවෙළින් $\mathbf{a}, \mathbf{b}, 3\mathbf{a}$ හා $4\mathbf{b}$ වේ; මෙහි $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ යනු ශූන්‍ය නොවන හා සමාන්තර නොවන දෛශික වේ. E යනු AD හා BC හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වේ. OAE ත්‍රිකෝණය සඳහා ත්‍රිකෝණ ආකලන නියමය භාවිතයෙන්,

$\lambda \in \mathbb{R}$ සඳහා $\overrightarrow{OE} = \mathbf{a} + \lambda(4\mathbf{b} - \mathbf{a})$ බව පෙන්වන්න.

එලෙසම, $\mu \in \mathbb{R}$ සඳහා $\overrightarrow{OE} = \mathbf{b} + \mu(3\mathbf{a} - \mathbf{b})$ බව ද පෙන්වන්න.

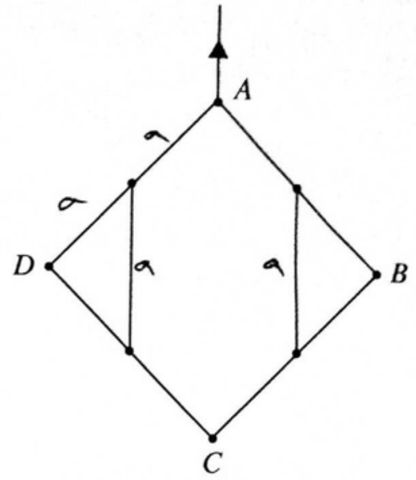
ඒ නයින්, $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{11}(9\mathbf{a} + 8\mathbf{b})$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) $\alpha\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$, $-3\mathbf{i} + \beta\mathbf{j}$ හා $\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ යන බල තුන, පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ හා $2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ වූ ලක්ෂ්‍ය හරහා ක්‍රියාකරයි; මෙහි $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ වේ. මෙම බල පද්ධතිය යුග්මයකට තුල්‍ය වන බව දී ඇත. α හා β හි අගයන් ද මෙම යුග්මයෙහි ඝූර්ණය ද සොයන්න.

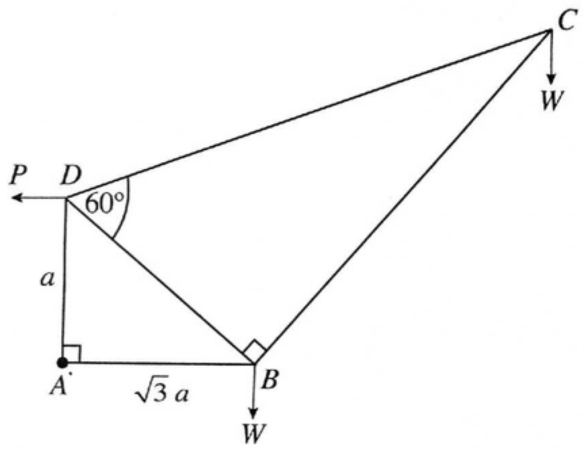
දැන්, O මූලය හරහා ක්‍රියාකරන $3\gamma\mathbf{i} + 4\gamma\mathbf{j}$ අලුත් බලයක් ඉහත බල පද්ධතියට එකතු කරනු ලැබේ; මෙහි $\gamma > 0$ වේ. මෙම බල 4 කින් සමන්විත නව බල පද්ධතිය සම්ප්‍රයුක්ත බලයකට තුල්‍ය වන බව පෙන්වා එහි විශාලත්වය, දිශාව හා ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

ඊළඟට, පිහිටුම් දෛශිකය $2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ වූ ලක්ෂ්‍යය හරහා ක්‍රියාකරන $p\mathbf{i} + q\mathbf{j}$ බලයක් එකතු කළ විට, බල 5 කින් සමන්විත මෙම පද්ධතිය සමතුලිතතාවේ ඇති බව දී ඇත. γ, p හා q හි අගයන් සොයන්න.

15. (*a*) එක එකක දිග $2a$ හා බර W වූ AB, BC, CD හා DA ඒකාකාර දඬු හතරක් ඒවායේ A, B, C හා D අන්තවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. AB හා BC හි මධ්‍යලක්ෂ්‍ය දිග a වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් යා කර ඇත. එලෙසම, AD හා DC හි මධ්‍යලක්ෂ්‍ය ද දිග a වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් යා කර ඇත. පද්ධතිය A ලක්ෂ්‍යයෙන් සිරස් තලයක එල්ලා ඇති අතර රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි සමතුලිතතාවේ පවතී. තන්තුවල ආතති ද BC මගින් AB මත B සන්ධියෙහිදී යොදන ප්‍රතික්‍රියාවද සොයන්න.



(*b*) රූපයේ දැක්වෙන, AB, BC, CD, DA හා DB සැහැල්ලු දඬු පහකින් සමන්විත රාමු සැකිල්ල, ඒවායේ අන්තවලදී සුමටව සන්ධි කර ඇත. $AD = a$, $AB = \sqrt{3}\,a$, $B\hat{A}D = 90^{\circ}$, $C\hat{B}D = 90^{\circ}$ හා $B\hat{D}C = 60^{\circ}$ බව දී ඇත. B හා C සන්ධි එක එකක W භාරය බැගින් එල්ලා රාමු සැකිල්ල A හිදී අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමටව සන්ධි කර AB තිරස්ව ඇතිව සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ, D සන්ධියෙහිදී යෙදූ තිරස් P බලයක් මගිනි.

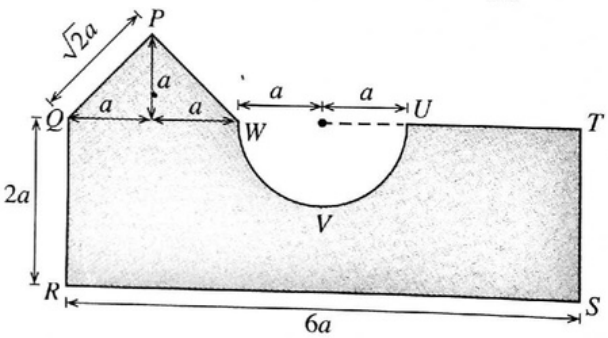


(i) P හි අගය සොයන්න.

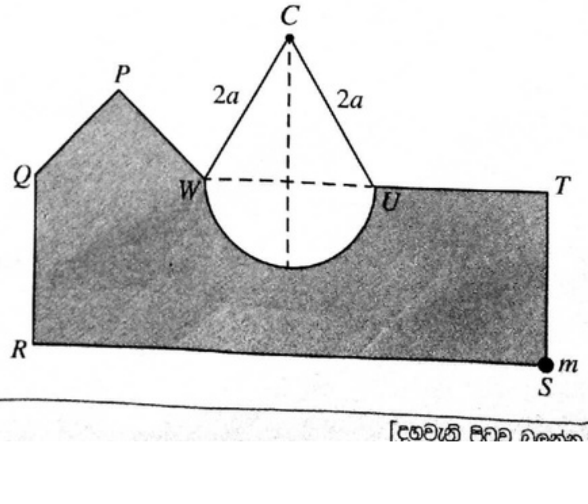
(ii) බෝ අංකනය භාවිතයෙන්, C, B හා D සන්ධි සඳහා, ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් අඳින්න. **ඒ නයින්**, දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල, ඒවා ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න ප්‍රකාශ කරමින් සොයන්න.

16. අරය r හා කේන්ද්‍රය O වන ඒකාකාර අර්ධවෘත්තාකාර ආස්තරයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, O සිට $\frac{4r}{3\pi}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

යාබද රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, $QRST$ ඍජුකෝණාස්‍රයෙන් අරය a වූ අර්ධ වෘත්තයක් ඉවත් කර, සමාන පැතිවල දිග $\sqrt{2}a$ වූ PQW සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් එක් කර පෘෂ්ඨීක ඝනත්වය σ වූ ඒකාකාර තුනී ලෝහ තහඩුවකින් තල ආස්තරයක් සාදා ඇත. $QR = 2a, RS = 6a$ හා $QW = 2a$ වේ. මෙම ආස්තරයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය QR සිට $\overline{x}$ දුරකින්ද RS සිට $\overline{y}$ දුරකින්ද පිහිටයි. $\overline{x} = \frac{(74-3\pi)\,a}{(26-\pi)}$ හා $\overline{y} = \frac{2(15-\pi)\,a}{(26-\pi)}$ බව පෙන්වන්න.



රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි, S හිදී ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් සවි කළ ඉහත ආස්තරය, කුඩා සුමට අචල C නාදැත්තක් මතින් යන, U හා W ට කෙළවරවල් ඈඳා ඇති දිග $4a$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් RS පැත්ත තිරස්ව ඇතිව සමතුලිතතාවේ එල්ලෙයි. a හා σ ඇසුරෙන් m හි අගය හා තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.



17. (*a*) B_1, B_2, B_3 හා B_4 සර්වසම පෙට්ටි හතරක, පාටින් හැර අන් සෑම අයුරකින්ම සර්වසම පෑන් 4 බැගින් අඩංගු වේ. $k = 1, 2, 3, 4$ සඳහා, එක් එක් B_k පෙට්ටියක රතු පෑන් k හා කළු පෑන් $4 - k$ බැගින් අඩංගු වේ. පෙට්ටි හතරෙන් එක් පෙට්ටියක් සසම්භාවී ලෙස තෝරාගෙන, එම පෙට්ටියෙන් පෑන් 2 ක් ඉවතට ගනු ලැබේ.

(i) ඉවතට ගත් පෑන් දෙක රතු පෑන් වීමේ,

(ii) ඉවතට ගත් පෑන් දෙක රතු පෑන් බව දී ඇති විට, එම පෑන් දෙක B_4 පෙට්ටියෙන් ඉවතට ගෙන තිබීමේ,

සම්භාවිතාව සොයන්න.

(*b*) $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ හා $\{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ දත්ත කුලකයන්ට එකම මධ්‍යන්‍යය ඇති අතර ඒවායේ සම්මත අපගමන, පිළිවෙළින්, σ_x හා σ_y වේ. $\{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m\}$ සංයුක්ත දත්ත කුලකයේ විචලතාව $\dfrac{n\sigma_x^2 + m\sigma_y^2}{n+m}$ බව පෙන්වන්න.

කම්හලක නිෂ්පාදිත පොට ඇණවල විෂ්කම්භ පහත වගුවේ සාරාංශගත කර ඇත.

විෂ්කම්භය (mm)	පොට ඇණ සංඛ්‍යාව (දහසේ ඒවායින්)
2 – 6	2
6 – 10	5
10 – 14	8
14 – 18	4
18 – 22	1

ඉහත දී ඇති ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය, මධ්‍යස්ථය හා විචලතාව නිමානය කරන්න.

අසල ඇති කම්හලක නිෂ්පාදිත වෙනත් පොට ඇණ 40 000 ක විෂ්කම්භවලට එම මධ්‍යන්‍යයම ඇති අතර විචලතාව 22.53 mm^2 වේ. කම්හල් දෙකෙහිම නිෂ්පාදිත පොට ඇණවල විෂ්කම්භයන්හි සංයුක්ත විචලතාව නිමානය කරන්න.

* * *