ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2022(2023)
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2022(2023)
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, 2022(2023)

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 S I

B කොටස

※ ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (a) $0 < |p| < 1$ යැයි ගනිමු. $p^2x^2 - 2x + 1 = 0$ සමීකරණයට තාත්ත්වික ප්‍රභින්න මූල ඇති බව පෙන්වන්න.

මෙම මූල α හා $\beta\ (> \alpha)$ යැයි ගනිමු. α හා β යන දෙකම ධන වන බව පෙන්වන්න.

p ඇසුරෙන් $(\alpha - 1)(\beta - 1)$ සොයා, $\alpha < 1$ හා $\beta > 1$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} = \dfrac{1}{|p|}\sqrt{2(1-|p|)}$ බව පෙන්වන්න.

$\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha} = \dfrac{1}{|p|}\sqrt{2(1+|p|)}$ බව **දී ඇත.** $\left|\sqrt{\alpha} - 1\right|$ හා $\left|\sqrt{\beta} - 1\right|$ මූල ලෙස ඇති වර්ගජ සමීකරණය

$|p|x^2 - \sqrt{2(1-|p|)}\,x + \sqrt{2(1+|p|)} - |p| - 1 = 0$ බව පෙන්වන්න.

(b) $p(x) = 2x^3 + ax^2 + bx - 4$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ. $(x + 2)$ යන්න $p(x)$ හා $p'(x)$ යන දෙකෙහිම සාධකයක් බව දී ඇත; මෙහි $p'(x)$ යනු x විෂයයෙන් $p(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය වේ. a හා b හි අගයන් සොයන්න. a හා b හි මෙම අගයන් සඳහා $p(x) - 3p'(x)$ සම්පූර්ණයෙන් සාධකවලට වෙන් කරන්න.

12. (a) අවම වශයෙන් එක් සිසුවෙකුට එක් පලතුරක්වත් ලැබෙන පරිදි, අඹ ගෙඩි හයක් හා දොඩම් ගෙඩි හතරක් සිසුන් අට දෙනෙකු අතරේ බෙදා දිය යුතුව ඇත.

(i) සිසුන් හය දෙනෙකුට එක් පලතුරක් බැගින් හා ඉතිරි දෙදෙනාගෙන් එක් අයෙකුට **අඹ ගෙඩි දෙකක්** හා අනිත් කෙනාට **දොඩම් ගෙඩි දෙකක්**,

(ii) සිසුන් හත් දෙනෙකුට එක් පලතුර බැගින් හා අනිත් සිසුවාට **අඹ ගෙඩි තුනක්**,

(iii) සිසුන් හත් දෙනෙකුට එක් පලතුර බැගින් හා අනිත් සිසුවාට **පලතුරු තුනක්**,

ලැබෙන පරිදි වූ වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{4(2r+7)}{(2r+1)(2r+3)(2r+5)}$ යැයි ගනිමු. තවද, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $f(r) = \dfrac{A}{(2r+1)} + \dfrac{B}{(2r+3)}$ යැයි ගනිමු; මෙහි A හා B යනු තාත්ත්වික නියත වේ. $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = f(r) - f(r+1)$ වන පරිදි A හා B හි අගයන් නිර්ණය කරන්න.

ඒ නයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = \frac{4}{5} - \frac{3}{2n+3} + \frac{1}{2n+5}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව **අපෝහනය** කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} (U_r + kU_{r+1}) = 1$ වන පරිදි k තාත්ත්වික නියතයෙහි අගය සොයන්න.

[අටවැනි පිටුව බලන්න.

13. (*a*) $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} a & -2 \\ 1 & a+2 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු. සියලු $a\in\mathbb{R}$ සඳහා $\mathbf{A}^{-1}$ පවතින බව පෙන්වන්න.

$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Q}=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{R}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ න්‍යාස $\mathbf{A}=\mathbf{PQ}^{\mathrm{T}}+\mathbf{R}$ වන පරිදි වේ. $a=1$ බව පෙන්වන්න.

a හි මෙම අගය සඳහා, $\mathbf{A}^{-1}$ ලියා දක්වා, **ඒ නයින්**, $\mathbf{A}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}$ වන පරිදි x හා y හි අගයන් සොයන්න.

(*b*) $z, w\in\mathbb{C}$ යැයි ගනිමු. $z\bar{z}=|z|^2$ බව පෙන්වා **ඒ නයින්**, $|z+w|^2=|z|^2+2\,\mathrm{Re}(z\bar{w})+|w|^2$ බව පෙන්වන්න.

$|z+w|^2+|z-w|^2=2\left(|z|^2+|w|^2\right)$ බව **අපෝහනය** කර, ආගන්ඩ් සටහනේ, z, w හා 0 නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය ඒක රේඛීය නොවන විට, ඒ සඳහා ජ්‍යාමිතික අර්ථ නිරූපණයක් දෙන්න.

(*c*) $z=-1+\sqrt{3}i$ යැයි ගනිමු. z යන්න $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $r>0$ හා $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ වේ.

$n\in\mathbb{Z}^+$ සඳහා $z^n=a_n+ib_n$ යැයි ගනිමු; මෙහි $a_n, b_n\in\mathbb{R}$ වේ. $m, n\in\mathbb{Z}^+$ සඳහා $\mathrm{Re}\left(z^m\cdot z^n\right)$ යන්න a_m, a_n, b_m හා b_n ඇසුරෙන් ලියා දක්වන්න.

z^{m+n} සලකමින් හා ද මුවාවර් ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් $m, n\in\mathbb{Z}^+$ සඳහා $a_ma_n-b_mb_n=2^{m+n}\cos(m+n)\frac{2\pi}{3}$ බව පෙන්වන්න.

14. (*a*) $x\neq-2$ සඳහා $f(x)=\dfrac{2x+3}{(x+2)^2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න $x\neq-2$ සඳහා $f'(x)=\dfrac{-2(x+1)}{(x+2)^3}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $f(x)$ වැඩි වන ප්‍රාන්තරය හා $f(x)$ අඩු වන ප්‍රාන්තර සොයන්න.

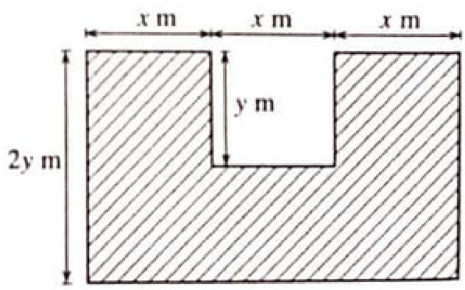
$f(x)$ හි හැරුම් ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

$x\neq-2$ සඳහා $f''(x)=\dfrac{2(2x+1)}{(x+2)^4}$ බව දී ඇත. $y=f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ, හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා නතිවර්තන ලක්ෂ්‍යය දක්වමින් $y=f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

$[k,\infty)$ මත $f(x)$ එකට-එක වන k හි කුඩාතම අගය ප්‍රකාශ කරන්න.

(*b*) රූපයේ පෙන්වා ඇති අඳුරු කළ පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය $45\ \mathrm{m}^2$ වේ. එය ලබාගෙන ඇත්තේ දිග $3x$ m හා පළල $2y$ m වූ සෘජුකෝණාස්‍රයකින්, දිග x m හා පළල y m වූ සෘජුකෝණාස්‍රයක් ඉවත් කිරීමෙනි. අඳුරු කළ පෙදෙසෙහි පරිමිතිය L m යන්න $x>0$ සඳහා $L=6x+\dfrac{54}{x}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න. L අවම වන x හි අගය සොයන්න.



15. (*a*) සියලු $x \in \mathbb{R}$ සඳහා $x^2+x+2 = A(x^2+x+1)+(Bx+C)(x+1)$ වන පරිදි A, B හා C නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $\dfrac{x^2+x+2}{(x^2+x+1)(x+1)}$ යන්න භින්න භාගවලින් ලියා දක්වා, $\displaystyle\int \frac{x^2+x+2}{(x^2+x+1)(x+1)}\,dx$ සොයන්න.

(*b*) $1+\sin 2x = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$ බව පෙන්වා, **ඒ නයින්**, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\sin 2x}\,dx = 1$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x^2\cos 2x}{(1+\sin 2x)^2}\,dx$ යැයි ගනිමු. කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන්, $I = -\dfrac{\pi^2}{8}+J$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{1+\sin 2x}\,dx$.

$\displaystyle\int_0^{a} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(a-x)\,dx$ යන සම්බන්ධය හා (*b*) හි ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් J හි අගය ගණනය කර $I = \dfrac{\pi}{8}(2-\pi)$ බව පෙන්වන්න.

16. $P \equiv (x_0, y_0)$ හා l යනු $ax+by+c=0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛාව යැයි ගනිමු. P සිට l ට ඇති ලම්බ දුර $\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ බව පෙන්වන්න .

l_1 හා l_2 යනු පිළිවෙළින්, $4x-3y+8=0$ හා $3x-4y+13=0$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා යැයි ගනිමු.

l_1 හා l_2, $A \equiv (1, 4)$ හිදී ඡේදනය වන බව පෙන්වන්න.

l_1 හා l_2 අතර සුළු කෝණයේ සමච්ඡේදකයේ පරාමිතික සමීකරණ $x = t$ හා $y = t+3$ ලෙස ලිවිය හැකි බව ද පෙන්වන්න; මෙහි $t \in \mathbb{R}$.

ඒ නයින්, l_1 හා l_2 සරල රේඛා දෙකම ස්පර්ශ කරන, l_1 හා l_2 අතර සුළු කෝණය අඩංගු වන පෙදෙසෙහි පවතින ඕනෑම වෘත්තයක සමීකරණය $(x-t)^2+(y-t-3)^2 = \dfrac{1}{25}(t-1)^2$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න; මෙහි $t \in \mathbb{R}$ හා $t \neq 1$.

ඉහත වෘත්ත අතුරින්, කේන්ද්‍රය A වන හා අරය 1 වන වෘත්තය ප්‍රලම්බව ඡේදනය කරන වෘත්තවල සමීකරණ සොයන්න.

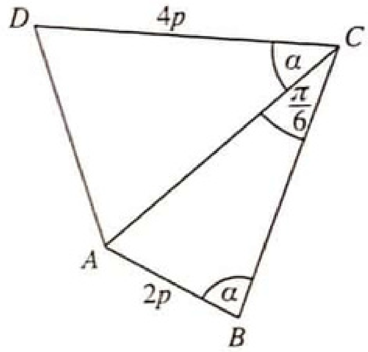
17. (*a*) $\cos A, \cos B, \sin A$ හා $\sin B$ ඇසුරෙන් $\cos(A+B)$ ලියා දක්වා, $\sin(A-B)$ සඳහා එවැනිම ප්‍රකාශනයක් ලබාගන්න.

$k \in \mathbb{R}$ හා $k \neq 1$ යැයි ගනිමු. $k > 1$ හා $k < 1$ අවස්ථා වෙන වෙනම සලකමින්, $2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$ යන්න $R\cos(\theta+\alpha)$ ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $R(>0)$ k ඇසුරෙන් ද $\alpha(0<\alpha<2\pi)$ ද නිර්ණය කළ යුතු තාත්ත්වික නියත වේ.

ඒ නයින්, $2k\cos\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)=|k-1|$ විසඳන්න.

(*b*) රූපයේ පෙන්වා ඇති $ABCD$ චතුරස්‍රයෙහි $AB = 2p$, $CD = 4p$, $A\hat{C}B=\frac{\pi}{6}$ හා $A\hat{B}C = A\hat{C}D = \alpha$ වේ. $AD^2 = 16p^2(\sin^2\alpha - \sin 2\alpha + 1)$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $AD = 4p$ නම් $\alpha = \tan^{-1}(2)$ බව පෙන්වන්න.



(*c*) $x > 1$ සඳහා $\tan^{-1}(\ln x^{\frac{2}{3}}) + \tan^{-1}(\ln x) + \tan^{-1}(\ln x^2) = \frac{\pi}{2}$ විසඳන්න.

***